第 7 章　特征值与特征向量

7.1 特征值和特征向量的定义，性质与计算

设A是n阶方阵，若存在非零向量x和常数λ，使得$Ax=\lambda x$，则称λ是A的特征值，x是A的属于特征值λ的特征向量.

例 1　已知$x=(-1,\ 1,\ k)^T$是矩阵
$$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$
的特征向量，求k.

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$$
$$=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}.$$

称为矩阵A的特征多项式，$|\lambda I-A|=0$叫特征方程.

例 2　矩阵$\begin{pmatrix}0&-2&-2\\2&2&-2\\-2&-2&2\end{pmatrix}$的非零特征值是

.

矩阵A的特征向量有两个重要性质：

（1）若X_1,X_2都是A的属于特征值λ的特征向量，则X_1+X_2也是A的属于特征值λ的特征向量；

（2）若 $\boldsymbol{X}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，$\boldsymbol{k}$ 是非零常数，则 $\boldsymbol{kX}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量.

如果将全体属于 λ 的特征向量再添一个零向量构成一个集合，记作 $\boldsymbol{V}_{\lambda}$，那么这个集合关于向量的加法和数乘向量这两种运算都是封闭的，也就是说，$\boldsymbol{V}_{\lambda}$ 是 $\boldsymbol{R}^{n}$ 的一个子空间，称为特征子空间．这个特征子空间的一组基就是属于这个特征值的线性无关的特征向量．特征子空间的维数就是属于这个特征值的线性无关的特征向量的最多个数．求某个特征值的特征向量就要将它的全体特征向量表示出来，就等于说求出特征子空间的基的线性组合.

矩阵的特征值与矩阵的其他参数有两个很重要关系，他们是

（1） 矩阵的所有特征值之和等于矩阵的迹（矩阵的主对角元之和）即

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\text{；}$$

（2） 矩阵的所有特征值的乘积等于矩阵的行列式，即

$$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i = \det A.$$

一些有用的结论.

（1） 若λ是A的特征值，则$k\lambda$是kA的特征值，其中k是常数.

（2） 若λ是A的特征值，则λ^2是A^2的特征值.

（3） 若λ是A的特征值，且A可逆，则$\frac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值.

（4） 若λ是A的特征值，$f(x)$是一个多项式,，则$f(\lambda)$是$f(A)$的特征值.

例 3　A是三阶矩阵，A^{-1}的特征值是 1，2，3，则$|A|$的代数余子式$A_{11}+A_{22}+A_{33}$=?

例4 已知$A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，$|A|=-1$，$A^*$的一个特征值$\lambda$对应的特征向量$\alpha=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\end{pmatrix}^T$，求$a,b,c,\lambda$.

例5 设n阶矩阵的所有元素都是 1，求A的特征值.

7.3　相似矩阵的概念及性质

设A是n阶方阵，若存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，则称B相似于A.

方阵的相似是矩阵之间的一种等价关系．他们有

（1）反身性：每个方阵都和自己相似；

（2）对称性：若A和B相似，则B和A也相似；

（3）传递性：若A和B相似，B和C相似，则A和C也相似.

相似矩阵有相同的秩，相同的特征多项式，相同的特征值，相同的迹，相同的行列式等.

例 6　若四阶矩阵A与B相似，矩阵A的特征值为$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式$\left|B^{-1}-I\right|=$ ___ .

例 7 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$ 则A与B

(A)　合同且相似.　　(B)　合同但不相似.

(C)　不合同但相似.　　(D)　不合同且不相似.

例 8　已知 3 阶矩阵A与三维向量x，使得向量组x,Ax,A^2x线性无关，且满足$A^3x=3Ax-2A^2x$.

(1)　记$P=\left(x,Ax,A^2x\right)$，求 3 阶矩阵B，使$A=PBP^{-1}$；

(2)　计算行列式$\left|A+I\right|$.

例 9　设A,B为同阶方阵，

（1）如果A,B相似，试证A,B的特征多项式相等.

（2）举一个二阶方阵的例子说明(1)的逆命题不成立.

（3）当A,B均为实对称矩阵时，试证(1)的逆命题成立.

7.4 方阵的相似对角化

方阵A可对角化的充分必要条件是A有n个线性无关的特征向量.

属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

例 10 设λ_1,λ_2是矩阵A的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1,α_2，则$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$.　　(B) $\lambda_2 \neq 0$.

(C) $\lambda_1 = 0$.　　(D) $\lambda_2 = 0$.

例 11 设A为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的三维列向量，且满足

$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ ，　$A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3$ ，$A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3$

(1) 求矩阵B，使得

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B;$$

(2) 求矩阵A的特征值；

(3) 求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

例 12 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$的特征方程有一个二重根，求$a$的值，并讨论$A$是否可相似对角化.

例 13 设n阶方阵A满足$A^2-5A+6I=0$，试证明矩阵A和对角矩阵相似.

例 14 设n阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$，

（1）求A的特征值和特征向量；

（2）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵.

7.5 实对称矩阵的对角化

实对称矩阵的特征值一定是实数. 也就是说，n阶方阵一定有n个实的特征值.

实对称矩阵对应不同特征值的特征向量正交.

实对称矩阵的这个性质，使我们可以找到正交矩阵，使得实对称矩阵和对角矩阵既相似又合同.

例 15 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，若 $\alpha_1 = (1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_2 = (2,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_3 = (-1,\ 2,\ -3)^T$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的特征向量，

（1） 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值和对应的特征向量；

（2） 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

实对称矩阵是一定和对角矩阵相似的，也就是说它是一定可以对角化的．它的对角化有 2 种形式．它既可以和对角矩阵相似，也可以和对角矩阵既相似同时还合同．就是说，对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，总存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使它和对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 相似，

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D},$$

或存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使它和对角矩阵 Λ 既相似又合同，

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \Lambda.$$

另外，它可以和对角矩阵合同，即存在可逆矩阵 T，使它和对角矩阵 $\boldsymbol{C}$ 合同，

$$\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{C}.$$

给定实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使其对角化的步骤是：

（1） 设 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$，求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

（2） 对每个特征值λ，解齐次线性方程组$(\lambda I - A)x = 0$，求出对应的特征向量．如果特征值是单根，就对应一个特征向量；如果特征值是几重根，就对应几个线性无关的特征向量；

（3） 对于重的特征值，将对应它的那组特征向量施行施密特正交化．对每个重特征值对应的特征向量全都正交化并单位化以后，所有的特征向量$q_1, q_2, \cdots, q_n$就构成了一个正交向量组；

（4） 将所有正交的特征向量按列排成一个矩阵，令其为$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$，那么$Q$是正交矩阵．有

$$Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

注意：$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$中$q_1, q_2, \cdots, q_n$的排列顺序要和特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$的排列顺序一致，使得$q_i$恰是$\lambda_i$的特征向量．

例16 设$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$是$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & a \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$的特征向量，求$a, b$的值，并求正交矩阵$P$使得$P^{-1}AP$为对角阵．

例 17 设实对称矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$，求可逆矩阵$P$，使$P^{-1}AP$为对角矩阵，并计算行列式$|A-I|$的值.

例 18 设矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. 已知线性方程组$Ax=b$有解但不惟一，试求：

（1）a的值；

（2）正交矩阵Q，使Q^TAQ为对角矩阵.

7.6 相似对角化的应用

例 19 求$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^k$.