2016 考研数学三真题及答案解析

来源：文都教育

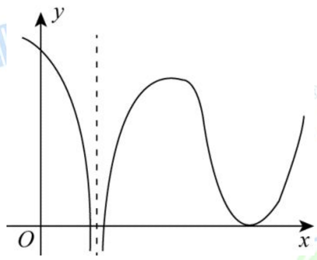
（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数如图所示，则（　　）

（A）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在 2 个拐点

（B）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在 3 个拐点

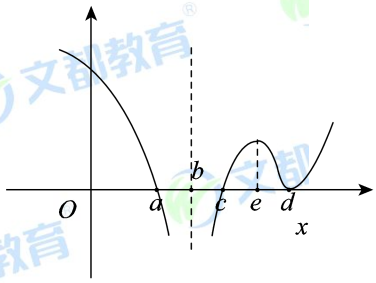
（C）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在 1 个拐点

（D）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 在 2 个拐点



解析：导函数图形如图

极值的怀疑点为：a,b,c,d



① $\left.\begin{matrix}当x<a时, f'(x)>0\\ 当x>a时, f'(x)<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a$ 为极大值点

② $\left.\begin{matrix}当x<b时, f'(x)<0\\ 当x>b时, f'(x)<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow a$ 不是极值点

③ $\left.\begin{matrix}当x<c时, f'(x)<0\\ 当x>c时, f'(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow c$ 为极小值点

④当 $x<d$ 和 $x>d$ 时，$f'(x)>0$　故 $x=d$ 不是极值点

∴有 2 个极值点　　排除 C，D.

又 $\left.\begin{matrix}当x<b时, f'(x)\downarrow\ \ \therefore f''(x)<0\\ 当b<x<e时, f'(x)\uparrow\ \ \therefore f''(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=b$ 为拐点.

$\left.\begin{matrix}当b<x<e时, f'(x)\uparrow\ \ \therefore f''(x)>0\\ 当e<x<d时, f'(x)\downarrow\ \ \therefore f''(x)<0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=e$ 为拐点.

$\left.\begin{matrix}当e<x<d时, f'(x)\downarrow\ \ \therefore f''(x)<0\\ 当x>d时, f'(x)\uparrow\ \ \therefore f''(x)>0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x=d$ 为拐点.

∴有 3 个拐点，排除 A

∴应选 B.

（2）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A）$f'_x-f'_y=0$

（B）$f'_x+f'_y=0$

（C）$f'_x-f'_y=f$

（D）$f'_x+f'_y=f$

解析： $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$

$$f_x'=\frac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}\qquad f_y'=\frac{0+e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{(x-y)^2}$$

$$\therefore f_x'+f_y'=\frac{e^x(x-y)-e^x+e^x}{(x-y)^2}=\frac{e^x}{x-y}=f$$

应选（D）.

（3）设 $T_i=\iint\limits_{D_i}3\sqrt{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (i=1,2,3)$ 其中 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$

$D_2=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\}$　　$D_3=\{(x,y)|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\}$

则（　　）

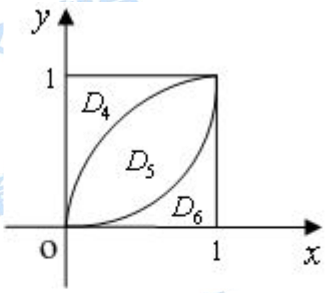
（A） $T_1<T_2<T_3$

（B） $T_3<T_1<T_2$

（C） $T_2<T_3<T_1$

（D） $T_2<T_1<T_3$

解析： 如图所示，



$D_1=D_4+D_5+D_6$， $D_2=D_5+D_6$， $D_3=D_4+D_5$，由于被积函数 $3\sqrt{x+y}$ 在 D_1 上为正，所以 $T_2<T_1$，$T_3<T_1$，又因为 $3\sqrt{x+y}$ 在 D_4 上显然大于 D_6 上对应 x 处的值，所以 $T_2<T_3$，故 $T_2<T_3<T_1$， 应选(C).

（4）级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$（$k$ 为常数）（　　）

（A）绝对收敛

（B）条件收敛

（C）发散

（D）收敛性 k 有关

解析： $\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，

而 $S_n=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$ 绝对收敛，选（A）.

（5）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是

（A） $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 相似.

（B） $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

（C） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.

（D） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

解析： $\because$ A 与 B 相似

$\therefore$存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

故 $B^T=P^TA^T(P^{-1})^T=\left[(P^T)^{-1}\right]^{-1}A^T\left[(P^T)^{-1}\right]$ $\therefore$ A^T 与 B^T 相似（A）正确

又 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，故 B^{-1} 与 A^{-1} 相似，（B）正确

$B+B^{-1}=P^{-1}(A+A^{-1})P$，故 $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似，（D）正确，

所以应选（C）.

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则

（A） $a>1$. （B） $a<-2$. （C） $-2<a<1$ （D） $a=1$ 或 $a=-2$

解析： 二次型矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a&-1&-1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&\lambda-a+1&0\\0&0&\lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$$

$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\ \lambda_2=\lambda_3=a-1$

∵二次型的正、负惯性指数分别为 1，2，则 $\begin{cases} a+2>0 \\ a-1<0 \end{cases}$

所以 $-2<a<1$，所以选（C）

（7）设 A,B 为两个随机事件，且 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1$，如果 $P(A|B)=1$，则（　　）

（A）$P(\overline{B}|\overline{A})=1$　　（B）$P(A|\overline{B})=0$

（C）$P(A\cup B)=1$　　（D）$P(B|A)=1$

解析：因 $P(A|B)=1$，则 $\dfrac{p(AB)}{P(B)}=1$，则 $P(B)-P(AB)=0$，则 $P(B\overline{A})=0$. 从而 $P(B|\overline{A})=0$.

又 $P(B|\overline{A})+P(\overline{B}|\overline{A})=1$，则 $P(\overline{B}|\overline{A})=1$，故选 A.

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2), Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)$=(　　)

（A）6　　（B）8　　（C）14　　（D）15

解析：因 $X\sim \mathrm{N}(1,2), Y\sim (1,4)$，则 $EX=1, DX=2, EY=1, DY=4$，

$D(XY)=E\left[(XY)^2\right]-E^2(XY)=E(X^2Y^2)-E^2(XY)$

因 X,Y 相互独立，则 $E\left[X^2Y^2\right]=E(X^2)E(Y^2)$，而 $E(X^2)=E^2X+DX=3$，

$E(Y^2)=E^2Y+DY=1+4=5$，则 $E(X^2Y^2)=15$，

又 $E(XY)=EXEY=1\times1=1$，则 $D(XY)=15-1=14$，故选 C.

（9）已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$=__________.

解析：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin 2x}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin 2x}{3\cdot 2x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}f(x)=2$$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)=6$

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$______.

解析： $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{1}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n}\right)$

$=\int_0^1 x\sin xdx=\sin 1-\cos 1$

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微， $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$_______.

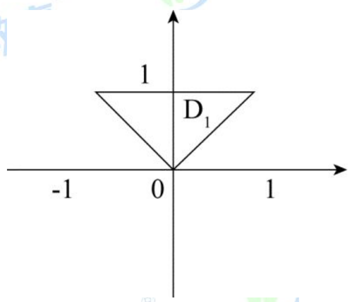
解析： $x=0,y=1,z=1$, 对方程两边求偏导：

$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'(1-z_x')$， $(x+1)z_y'-2y=x^2\left(f_1'\cdot(-z_y')+f_2'\right)$

$z_x'(0,1)=-1,\ z_y'(0,1)=2,\ dz\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

(12) 设 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$，则 $\iint\limits_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ____________.

解析： 区域 D 的图像：



$D_1=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 1,0\le x\le 1\}$

由对称性知 I=$\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=2\iint\limits_{D_1}x^2e^{-y^2}dxdy=2\int_0^1 e^{-y^2}dy\int_0^y x^2dx$

$=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy \underline{\underline{y^2=t}} \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t=$

$=-\frac{1}{3}\int_0^1 t\,\mathrm{d}e^{-t}=-\frac{1}{3}\left[te^{-t}\big|_0^1-\int_0^1 e^{-t}dt\right]$

$=\frac{1}{3}\left(1-2e^{-1}\right)$

(13) 行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$______.

解析： $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$

(14) 设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为____________.

解析： 由分析可知：前三次中只取到了两种颜色的球，最后一次取的球的颜色不能在前

面出现..

例如第四次取到红球，则前三次为两次取白球，一次取黑球；或者一次取白球，两次取黑球.

故所求概率为 $p=\dfrac{C_3^1\times C_3^1\times A_2^2}{3^4}=\dfrac{2}{9}$.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$.

解析： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)\dfrac{1}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\cos 2x+2x\sin x-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos 2x+2x\sin x-1}\cdot\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x+2x\sin-1}{x^4}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x+\sin x+2x\cos x}{4x^3}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x\cos x-\sin 2x}{x^3}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+\cos x-x\sin-2\cos 2x}{3x^2}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{2wsx-x\sin-2\cos 2x}{3x^2}}$$

$$=e^{\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2swx-swx-xwsx+4\sin x}{2x}}$$

$$=e^{\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3swx-xwsx+4\sin x}{2x}}$$

$$=e^{\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to 0}\frac{-3swx-x\cos x+4swzx}{x}}$$

$$=e^{\frac{1}{12}(-3-1+8)}$$

$$=e^{\frac{1}{3}}$$

(16)(本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性为

$$\eta=\frac{p}{120-p}(\eta>0)$$

p 为单价(万元).

（Ⅰ）求需求函数的表达式；

（Ⅱ）求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义.

解析：(I)题意知

$-\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dp}=\frac{P}{120-P}$ 分离变量得

$-\frac{1}{Q}\frac{dQ}{dP}=\frac{1}{120-P}dP$

两边积分得 $Q=C(P-120)$

$Q(D)=1200$ 得 $C=-10$

所以需求函数为 $Q(P)=-10(P-120)=10(120-P)$

(II) 收益函数为 $R(P)=PQ=10P(120-P)=-10P^2+1200P$

边际收益函数为 $R'(p)=-20P+1200$

当 P=100 时，边际收益为-800 万元

经济意义为：当价格为 100 万元时，收益亏损 800 万元.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值.

解析：

当 $0<x<1$ 时，$f(x)=\int_0^x(t^2-x^2)dt+\int_x^1(x^2-t^2)dt=\frac{4x^3}{3}-x^2+\frac{1}{3}$,

此时，$f'(x)=4x^2-2x$；

当 $x\geq 1$ 时，$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)dt=x^2-\frac{1}{3}$,

此时，$f'(x)=2x$；

所以 $f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x, 0<x<1,\\ 2x, \quad x\geq 1.\end{cases}$

当 $0<x<1$ 时, 令 $f'(x)=4x^2-2x=0$, 解得 $x=\frac{1}{2}$.

而 $f''(\frac{1}{2})=(8x-2)|_{x=\frac{1}{2}}=2$, 从而 $x=\frac{1}{2}$ 是极小值点，$f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$；

当 $x\geq 1$ 时，$f'(x)=2x=0$, 得 $x=0$, 舍去；

因此 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$.

(18) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t+e^{-x}-1$, 求$f(x)$.

解析： 令 $u=x-t$

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=-\int_x^0 f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$$

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x fuat-\int_0^x tf(u)at+e^{-x}-1$$

两边对 x 求导得

$$f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-e^{-x}$$

即 $f'(x)-f(x)=e^{-x}$ 此为一阶线性非齐闪微分方程

通解为 $f(x)=e^{-\int -1dx}\left(\int e^{-x}\cdot e^{-\int -1dx}+\mathrm{d}x+c\right)$

$$=e^{x}\left(\int e^{-2x}\mathrm{d}x+c\right)$$

$$=e^{x}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+c\right)$$

又 $f(u)=-1$ 故 $f(u)=C-\frac{1}{2}=-1$

$$C-\frac{1}{2}$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}e^{x}\left(e^{-2x}+1\right)$$

$$=-\frac{e^{-x}+e^{x}}{2}$$

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数。

解析: 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(2n+3)}{(n+1)(2n+1)}=1$, 所以收敛半径 $R=1$,

当 $x=\pm1$, 幂级数均收敛, 此幂级数收敛域为 $[-1,1]$;

设 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^{2n+2}\right)}{(n+1)(2n+1)}$

$$s''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(x^{2n+2}\right)''}{(n+1)(2n+1)}=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=2\frac{1}{1-x^2}$$

因为 $s(0)=0, s'(0)=0, \int_0^x s''(t)\mathrm{d}t=s'(x)-s'(0)=s'(x)=2\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t=\ln\frac{1+x}{1-x}$

$\int_0^x s'(t)\mathrm{d}t = s(x)-(0)=s(x)$

$$s(x)=\int_0^x \ln\frac{1+t}{1-t}dt$$
$$=t\ln\frac{1+t}{1-t}\Big|_0^x+\int_0^x\frac{d(1-t^2)}{1-t^2}$$
$$=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)$$

当 $x=\pm1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+2)(2n+1)}=2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\cdots\right)$$
$$=2\ln2$$

所以 $s(x)=\begin{cases}x\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2), & -1<x<1,\\ 2\ln2, & x=\pm1.\end{cases}$

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的通解.

解析： $\because$ $Ax=\beta$ 无解

（1）$\therefore$ $|A|=0$，即 $\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a&0&2a\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&a\\a&2a\end{vmatrix}=a^2-2a=a(a-2)=0$

$\therefore$ $a=0$或$a=2$

当 $a=0$ 时，

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\1&1&1&0\\1&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

$\because$ $r(A)\neq r(A,\beta)$　　$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$Ax=\beta$ 无解

当 $a=2$ 时，$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&0\\1&0&2&1\\3&1&3&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&0\\0&-1&3&1\\0&-2&6&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&0\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\because r(A)=r(A,\beta)=2<3 \quad \therefore a\neq 2 \quad \therefore a=0$

（2）当 $a=0$ 时 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$A^T\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\left(A^TA\quad,\quad A^T\beta\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&-1\\3&2&2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&-1\\0&-1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\therefore A^TAX=A^T\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$（其中 k 为任意常数）

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解析：

(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=0$ 时解 $(0E-A)x=0$ 即 $Ax=0$

由 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_1=0$ 的无关特征向量 $d_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=-1$ 时 解 $(-E-A)x=0$

由 $-E-A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_2=-1$ 的无关特征向量 $d_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-2$ 时 解 $(-2E-A)x=0$

由 $(-2E-A)=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_3=-2$ 的无关特征向量 $d_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=\left(d_1,d_2,d_3\right)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$

$\therefore A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}^{-1}$

其 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\therefore A^{99}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-2^{99}\\0&-1&-2^{100}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（2）$\because B^2=BA \qquad \therefore B^{100}=BA^{99}$

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\therefore\begin{cases}\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2\\\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2\\\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2\end{cases}$$

（22）（本题满分 11 分）

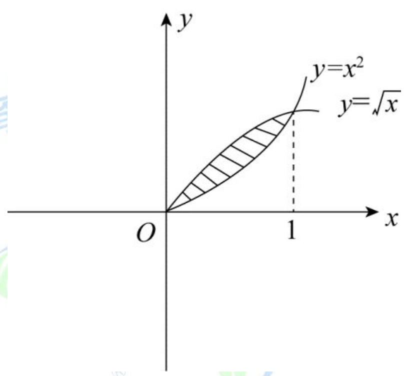
设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1,X\le Y,\\0,X>Y.\end{cases}$

（Ⅰ）写出 (X,Y) 的概率密度；

（Ⅱ）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（Ⅲ）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

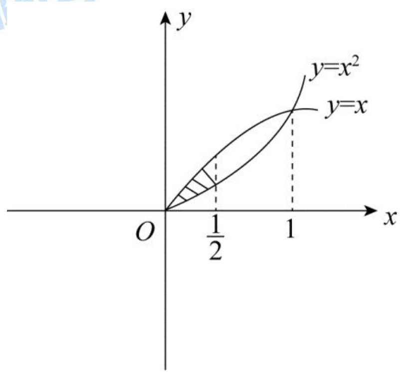
解析（1）区域 D 的面积 $S_D=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$



故 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}3,(x,y)\in D\\0,\ 其他\end{cases}$

（2）$P\left\{U=0,\ X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}3dy$

$$=3\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{4}$$



又 $P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}3dy=3\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{2}$

$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_{x\ge\frac{1}{2}}f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$

$$=3\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right]=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}$$

$$\therefore P\left\{U=0,X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\{U=0\}\cdot P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$$

故 X 与 U 不独立，

（3）Z 的分布函数 $F_2(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+X\le z\}$.

$$=P\{U=0,U+x\le z\}+P\{U=1,U+X\le z\}$$
$$=P\{U=0,X\le z\}+P\{U=1,U\le z-1\}$$
$$=P\{X>Y,X\le z\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$$

①$z<0,F_2(z)=0.$

②$0\le z<1,F_2(z)=P\{X>Y,X\le z\}+P(\phi)$

$$=\iint\limits_{\substack{x>y\\x\le z}}f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3\,dy=3\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3\right)=\frac{3}{2}z^2-z^3$$

③$1\le z<2$，

$$F_2(z)=P\{X>Y\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$$
$$=\frac{1}{2}+\iint\limits_{\substack{x\le y\\x\le z-1}}f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}+\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3\,dy$$
$$=\frac{1}{2}+3\left[\frac{2}{3}(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(z-1)^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$$

④$z\ge2$，$F_2(z)=1$。

故 Z 的分布函数为 $F_2(z)=\begin{cases}0,z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3,0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2,1\le z<2\\ 1,z\ge2\end{cases}$，

（23）（本题满分 11 分）

设总体的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,其他\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

（Ⅰ）求T的概率密度；

（Ⅱ）确定a，使得$E(aT)=\theta$.

解析：（1）因$T=\max(X_1,X_2,X_3)$，则T的分布函数为

$$F_T(t)=P\{T\le t\}=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}$$
$$=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}.$$
$$=P\{X_1\le t\}\cdot P\{X_2\le t\}\cdot P\{X_3\le t\}$$
$$=F_{X_1}(t)\cdot F_{X_2}(t)\cdot F_{X_3}(t)$$
$$=F_X^3(t)$$

因X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \dfrac{1}{\theta^3}x^3,0\le x<\theta\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$

$\therefore T$的分布函数$F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \left(\dfrac{1}{\theta^3}t^3\right)^3, & 0\le t<\theta\\ 1, & t\ge\theta\end{cases}=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\theta^9}t^9, & 0\le t<\theta\\ 1, & t\ge\theta\end{cases}$

$\therefore T$的概率密度$F_t(t)=\begin{cases}\dfrac{9}{\theta^q}t^8,0<t<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

（2）因$E(at)=\theta$,即$aE(T)=\theta$，可得：$a=\dfrac{\theta}{E(T)}$.

又$E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tF_T(t)dt=\int_0^{\theta}\dfrac{q}{\theta q}t^8\cdot tdt=\dfrac{9}{10}\theta$，则$a=\dfrac{\theta}{\frac{9}{10}\theta}=\dfrac{10}{9}$.