

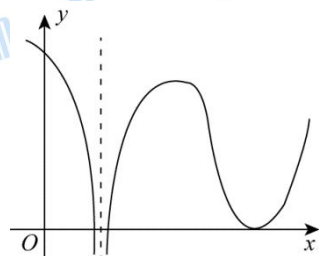
2016 考研数学 (三) 真题

来源: 文都教育

一、选择: 1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续; 其导数如图所示, 则 ()

- (A) 函数有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 在 2 个拐点
- (B) 函数有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 在 3 个拐点
- (C) 函数有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 在 1 个拐点
- (D) 函数有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 在 2 个拐点



(2) 已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则

(A) $f'_x - f'_y = 0$

(B) $f'_x + f'_y = 0$

(C) $f'_x - f'_y = f$

(D) $f'_x + f'_y = f$

(3) 设 $T_i = \iint_{D_i} 3\sqrt{x+y} dx dy$ ($i=1, 2, 3$) 其中 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$

则 ()

(A) $T_1 < T_2 < T_3$

(B) $T_3 < T_1 < T_2$

(C) $T_2 < T_3 < T_1$

(D) $T_2 < T_1 < T_3$

(4) 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ (k 为常数) ()

(A) 绝对收敛

(B) 条件收敛

(C) 发散

(D) 收敛性 k 有关

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是

(A) A^T 与 B^T 相似.

(B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似.

(D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1, 2, 则

- (A) $a > 1$.
- (B) $a < -2$.
- (C) $-2 < a < 1$
- (D) $a = 1$ 与 $a = -2$

(7) 设 A, B 为两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则 ()

- (A) $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$
- (B) $P(A|\bar{B}) = 0$
- (C) $P(A \cup B) = 1$
- (D) $P(B \cup A) = 1$

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) = ()$

- (A) 6
- (B) 8
- (C) 14
- (D) 15

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n}) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设函数 $f(u, v)$ 可做, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)x - y' = x'f(x-z, y)$ 确定, 则 $dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设 $D = \{(x, y) | x \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x^2 e^{-y^1} dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设袋中有红、白黑球个 1 个, 从中有效回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的

求都取到时停止, 则取球次数恰好为 4 的概率为_____.

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分, 请将解答写在答题纸指定位置上, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos 2x + 2x \sin x) x^{\frac{1}{4}}$.

(16)(本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件, 该商品的需求函数 $Q = Q(p)$, 需求弹性

$$\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0), p \text{ 为单价 (万元)}$$

(I) 求需求函数的表达式;

(II) 求 $p = 100$ 万元时的边际收益, 并说明其经济意义.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x (x-t) f(t) dt + e^{-x} - 1$, 求 $f(x)$.

(19)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax = \beta$ 无解.

(I) 求 a 的值;

(II) 求方程组 $A^T Ax = A^T \beta$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(I) 求 A^{99} ;

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表

示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y. \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的质量密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数,

X_1, X_2, X_3 为来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 $E(aT) = \theta$.