2016 考研数学一真题及答案解析

来源：文都教育

一、选择题：18 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若反常积分 $\int_0^{-\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）

（A）　$\alpha<1$ 且 $b>1$.

（B）　$\alpha>1$ 且 $b>1$.

（C）　$\alpha<1$ 且 $a+b>1$.

（D）　$\alpha>1$ 且 $a+b>1$.

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\cdot\frac{1}{x^a(1+x)^b}=1,\lim\limits_{x\to\infty}x^{a+b}\cdot\frac{1}{x^a(1+x)^b}=1$，因为 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}$ 收敛，所以

$a<1,a+b>1$，选择（C）

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1),x<1,\\ \ln x,x\geq 1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）

（A）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1,\\ x(\ln x-1),x\geq 1.\end{cases}$

（B）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1,\\ x(\ln x-1)-1,x\geq 1.\end{cases}$

（C）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1,\\ x(\ln x+1)+1,x\geq 1.\end{cases}$

（D）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2,x<1,\\ x(\ln x-1)+1,x\geq 1.\end{cases}$

解析：由原函数的定义知，$f(x)=\int f(x)\mathrm{d}x$

$x<1,f(x)=\int 2(x-1)\mathrm{d}x=(x-1)^2+C_1$.

$x>1,f(x)=\int \ln x\mathrm{d}x=x(\ln x-1)+C_2$.

又原函数必可导，则 $f(x)$ 一定连续.

$\therefore F(x)$ 在 $x=1$ 连续

$\therefore C_1 = C_2 - 1$

$\therefore F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+c, x<1\\ x(\ln x-1)+c+1, x\geq 1\end{cases}$， $c\in R$.当$c=0$时，选 D.

（3）若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$（　）

（A）　$3x(1+x^2)$

（B）　$-3x(1+x^2)$

（C）　$\dfrac{x}{1+x^2}$

（D）　$-\dfrac{x}{1+x^2}$

解析: 令 $y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程

$y'+P(x)y^2q(x)$ 的两个解

$\therefore y_1-y_2$ 是 $y'+P(x)y=0$ 的解.

$\therefore -2\cdot\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x-2\sqrt{1+x^2}\cdot P(x)=0$

$\therefore -2\cdot\dfrac{1}{2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x-2\sqrt{1+x^2}\cdot P(x)=0$

$\therefore P(x)=-\dfrac{x}{(1+x^2)}$.

$\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 是 $y'+P(x)y=g(x)$ 的解.

$[(1+x^2)^2]'+P(x)\cdot(1+x^2)^2=g(x)$

$\therefore 2(1+x^2)\cdot 2x+p(x)\cdot(1+x^2)^2=g(x)$

$\therefore\ q(x)=4x\cdot 2x+p(x)\cdot(1+x^2)^2$

$$=4x(1+x^2)-\frac{x}{1+x^2}(1+x^2)^2$$

$$=4x(1+x^2)-x(1+x^2)$$

$$=3x(1+x^2)$$

选择 A.

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & \leq 0, \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots, \end{cases}$ 则（　　）

（A）　$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B）　$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C）　$f(x)$ 是 $x=0$ 处连续但不可导

（D）　$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

解析：因 $f(x)=\begin{cases} x, x\leq 0 \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\leq x<\frac{1}{n} \end{cases}$.

则 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=0, \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$

$\therefore\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

又 $f_-^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{x}=1$

$$f_+^{'}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}=\infty$$

$\therefore\ f'(0)$ 不存在，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导

选择 C

（5）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是（　　）

（A）$\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 相似.　　　　（B）$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

（C）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.　　（D）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

解析：$\because$ A 与 B 相似

$\therefore$存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

故 $B^T=P^TA^T(P^{-1})^T=\left[(P^T)^{-1}\right]^{-1}A^T\left[(P^T)^{-1}\right]$ ∴ A^T 与 B^T 相似（A）正确

又 $B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，故 B^{-1} 与 A^{-1} 相似，（B）正确

$B+B^{-1}=P^{-1}(A+A^{-1})P$，故 $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似，（D）正确，

所以应选（C）.

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）

（A）单叶双曲面　　（B）双叶双曲面

（C）椭球面　　（D）柱面

解析：

$\because f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$

∴此二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&1-\lambda&2\\2&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(5-\lambda)$$

$\therefore \lambda_1=5\quad \lambda_2=\lambda_3=-1$

所以此二次型在正交变换 $X=QY$ 下的标准形为 $f(y_1,y_2,y_3)=5y_1^2-y_2^2-y_3^2$

$\therefore f(x_1,x_2,x_3)\underset{X=QY}{=\!=}5y_1^2-y_2^2-y_3^2=2$ 表示双叶双曲面，所以选（B）

（7）设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$，则（　　）

（A）p 随着 μ 的增加而增加

（B）p 随着 σ 的增加而增加

（C）p 随着 μ 的增加而减少

（D）p 随着 σ 的增加而减少

解析：$P=P\{x\le\mu+\sigma^2\}=P\{\dfrac{x-\mu}{\sigma}\le\sigma\}=\Phi(\sigma)$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，$\Phi(x)$ 是单调增加的，故选（B）.

（8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果，A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\dfrac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2

发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为（　　）

（A）　　　　（B）　　　　（C）　　　　（D）

解析: $P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{9},P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{9},P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{9}$,

类似可求得其它情况下的概率,其分布律如下:

X \ Y	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

所以 $EX=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}=\frac{2}{3}$,

同理可得 $EY=\frac{2}{3},EX^2=\frac{8}{9},EY^2=\frac{8}{9}$,

$EXY=\frac{2}{9},Cov(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{4}{9}$,

$DX=EX^2-E^2X=\frac{4}{9},DY=EY^2-E^2Y=\frac{4}{9}$,

$\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{Dy}}=-\frac{1}{2}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题指定位置上.

（9）　$\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=$________.　　.

解析:
$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$$
$$=\frac{1}{2}$$

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$________.

解析:

$$\operatorname{rol} A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & Q & R \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & z \end{vmatrix}=j+(y-1)k.$$

(11) 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$________.

解析： $x=0,y=1,z=1,$ 对方程两边求偏导：

$z+(x+1)z_x'=2xf(x-z,y)+x^2f_1'\left(1-z_x'\right)$， $(x+1)z_y'-2y=x^2\left(f_1'\cdot(-z_y')+f_2'\right)$

$z_x'(0,1)=-1, z_y'(0,1)=2,\ dz\big|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

（12）略

（13.）行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$______.

解析： $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}+4=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$

（14）设 $x_1,x_2,\ldots x_n$ 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}$=9.5，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

解析： 因 $\bar{X}\sim N\left(\mu,\frac{1}{n}\sigma^2\right)$，则 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma}\sim N\left(0,1\right)$，则 $P\left\{-Z_{\frac{\alpha}{2}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma}<Z_{\frac{\alpha}{z}}\right\}=0.95$，

其中 $\alpha=0.05$

μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(\bar{X}-\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma Z_{\frac{\alpha}{2}},\bar{X}+\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma Z_{\frac{\alpha}{2}})$.

又 μ 的置信上限为 10.8，且 $\bar{x}=9.5$，则 $\sqrt{\frac{1}{n}}\sigma Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.3$

故 μ 的双侧置信区间为 $\left(9.5-1.3,9.5+1.3\right)=\left(8.2,10.8\right)$。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文

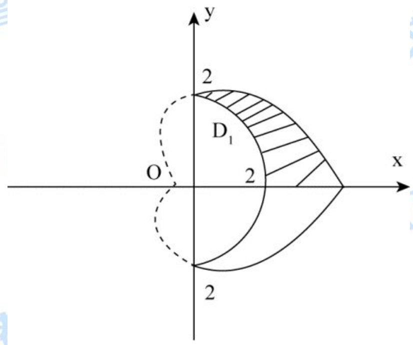
字说明，证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析：由分析可知 D 的图形如图所示：

由圆和心形线所围成.D 关于 x 轴对称.



$$\therefore \iint\limits_{D} xdxdy = 2\iint\limits_{D_1} xdxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} do\int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta \mathrm{d}r$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((1+\cos\theta)^3-1\right)\cos\theta\, d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{16}{3}\times\left(2+\frac{15}{16}\pi\right)$$

$$=\frac{32}{3}+5\pi$$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

（Ⅰ）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

（Ⅱ）若 $y(0)=1, y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解析：（1） $y''+2y'+ky=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+k=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+k}<0$

$$\therefore y(x)=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

$$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x = c_1\frac{1}{\lambda_1}\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\Big|_0^{+\infty}+c_2\frac{1}{\lambda_2}\mathrm{e}^{\lambda_2 x}\Big|_0^{+\infty}=-\left(\frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_2}{\lambda_2}\right).$$

$\therefore \int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

（2） $\because y(0)=1.\quad y'(0)=1.$

$$\therefore\begin{cases}c_1+c_2=1\\ \lambda_1c_1+c_2\lambda_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_1=\dfrac{1-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{2+\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}}\\[2ex] c_2=\dfrac{\lambda_1-1}{\lambda_1-\lambda_2}=\dfrac{-2+\sqrt{1-k}}{2\sqrt{1-k}}\end{cases}$$

$$\therefore\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=-\left(\frac{c_1}{\lambda_1}+\frac{c_2}{\lambda_2}\right)=\frac{3}{k}.$$

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1, L_t$ 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_L \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

解析:

$\because \dfrac{\partial f(x\cdot y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$

$\therefore f(x\cdot y)=xe^{2x}\cdot e^{-y}+\varphi(y)$

$\because f(0,\ y)=\varphi(y)=y+1$

$\therefore \varphi(y)=y+1 \Rightarrow f(x\cdot y)=xe^{2x-y}+y+1$

而 $\dfrac{\partial f(x\cdot y)}{\partial y}=-xe^{2x-y}+1$

$\therefore I(t)=\int_{L_1}(2x+1)e^{2x-y}dx+\left(1-xe^{2x-y}\right)dy=\int_{L_1}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$\therefore \dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow$ 曲线积分与路经联.

$\therefore I(t)=\int_0^1(2x+1)e^{2x}dx+\int_0^t\left(1-e^{2-y}\right)dy=t+e^{2-t}$

$I'(t)=1-e^{2-t}$ 令 $I'(t)=0 \quad \Rightarrow t=2.$

$I'(t)=e^{2-t}, I''(t)\big|_{t=2}=1\geq 0$

$\therefore$ 当 t=2 时 I（t）取极小值，且为最小值.

$\therefore \mathrm{I}(t)$ 的最小值为 $\mathrm{I}(t)\big\|_{t=2}=3$.

（18）（本题满分 10 分）

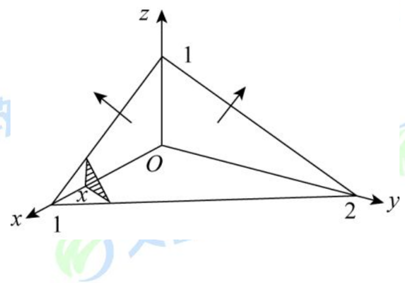
设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解析：由高斯公式得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x-2+3)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)dxdydz$$

$$=\int_0^1 dx\iint\limits_{D(X)}(2x+1)dydz=\int_0^1(2x+1)\iint\limits_{D(x)}dydz$$



$D(x): y+2z\leq 2-2x$

$$=\int_0^1 (2x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 2(1-x)^2 dx$$

$$=\int_0^1 (2x+1)(x^2-2x+1)dx$$

$$=\int_0^1 (2x^3-3x^2+1)dx$$

$$=(2\cdot\frac{1}{4}x^4-x^3+x)\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$

（19）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2...)$ 证明：

（Ⅰ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

解析：（1）由题意知 $|x_{n+1}+x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|$

$$=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})| \quad \xi介于x_n与x_{n-1}之间$$

$$<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|$$

$$<\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|$$

……

$$<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$$

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|=|x_2-x_1|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_{n+1}-x_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛

（2）由第（1）的结论知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛其部分和的极限为

$\lim\limits_{x\to\infty}S_n=\lim\limits_{x\to\infty}(x_{n+1}-x_1)=\lim\limits_{x\to\infty}x_{n+1}-x_1$ 存在，故 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在，

设 $\lim\limits_{x\to\infty}x_n=a$，由于 $f(x)$ 可导，$f(x)$ 连续，

对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 取极限得 $a=f(a)$，

于是 $f(a)-f(0)=f'(\xi)a$，ξ 位于 0 与 a 之间，

即 $a-1=f'(\xi)a, a=\dfrac{1}{1-f'(\xi)}$，

由条件知 $0<f'(\xi)<\dfrac{1}{2}$，故 $0<a<2$.

20.　（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$.

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求此方程.

解析： $(A,B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\2&a&1&1&a\\-1&1&a&-a-1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&-a+1&0\end{array}\right)$

（1）当 $a\neq-2$ 且 $a\neq1$ 时　$r(A)=r(A,B)=3$，方程 $AX=B$ 有唯一解

设 $X=(X_1,\ X_2), B=(b_1,\ b_2)$,

$AX=A(X_1,\ X_2)=(AX_1,AX_2)=(b_1,\ b_2)$,

$\therefore AX_1=b_1,\ AX_2=b_2$

对于 $AX_1=b_1\Rightarrow X_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, AX_2=b_2\Rightarrow X_2=\begin{pmatrix}\dfrac{3a}{a+2}\\\dfrac{a-4}{a+2}\\0\end{pmatrix}$.

$\therefore X=(X_1,\ X_2)=\begin{pmatrix}1&\dfrac{3a}{a+2}\\0&\dfrac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}$

（2）当 $a=1$ 时，$r(A)=r(A,B)=2$，方程 $AX=B$ 有无穷多解

$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

$\therefore AX_1=b_1$ 的通解为 $X_1=k_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-k_1-1\\k_1\end{pmatrix}$

$AX_2=b_2$ 的通解为 $X_2=\begin{pmatrix}1\\-k_2-1\\k_2\end{pmatrix}$

$\therefore X=\begin{pmatrix}1&1\\-k_1-1&-k_2-1\\k_1&k_2\end{pmatrix}$ 其中 k_1,k_2 为任意常数

（3）当 $a=-2$ 时，$(A,B)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&0&0&-6\end{array}\right)$

$\because AX_2=b_2$ 无解

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时　$AX=B$ 无解

21、(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解析：

(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

$\therefore A$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=0$ 时解 $(0E-A)x=0$ 即 $Ax=0$

由 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_1=0$ 的无关特征向量 $d_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=-1$ 时 解 $(-E-A)x=0$

由 $-E-A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_2=-1$ 的无关特征向量 $d_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-2$ 时 解 $(-2E-A)x=0$

由 $(-2E-A)=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_3=-2$ 的无关特征向量 $d_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=(d_1,d_2,d_3)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$

$\therefore A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}^{-1}$

其 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$\therefore A^{99}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-2^{99}\\0&-1&-2^{100}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$

（2）$\because B^2=BA \quad \therefore B^{100}=BA^{99}$

则$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98}\\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases}\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2\\ \beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2\\ \beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2\end{cases}$$

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$上服从均匀分布，

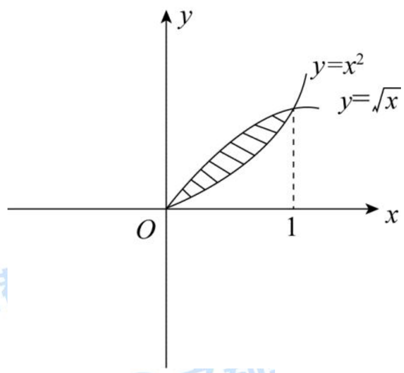
令$U=\begin{cases}1, X\le Y,\\ 0, X>Y.\end{cases}$

（Ⅰ）写出(X,Y)的概率密度；

（Ⅱ）问U与X是否相互独立？并说明理由；

（Ⅲ）求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

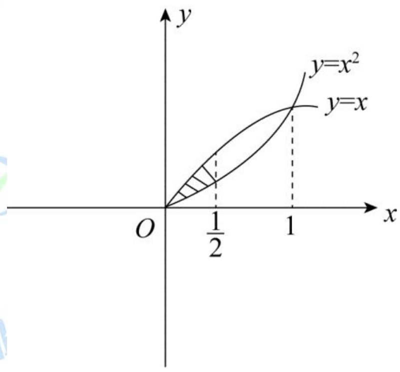
解析（1）区域 D 的面积$S_D=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\frac{1}{3}$



故(X,Y)的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}3,(x,y)\in D\\ 0，其他\end{cases}$

（2）$P\left\{U=0，X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{x}3dy$

$$=3\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{4}$$



又$P\{U=0\}=P\{X>Y\}=\int_0^1dx\int_{x^2}^{x}3dy=3\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\frac{1}{2}$

$P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\int_{x\ge\frac{1}{2}}^{1}f(x,y)\,dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx$

$=3\left[\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right]=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8}$

$\therefore P\left\{U=0,X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\{U=0\}\cdot P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$

故X与U不独立。

（3）Z 的分布函数$F_2(z)=P\{Z\le z\}=P\{U+X\le z\}$.

$$=P\{U=0,U+x\le z\}+P\{U=1,U+X\le z\}$$
$$=P\{U=0,X\le z\}+P\{U=1,U\le z-1\}$$
$$=P\{X>Y,X\le z\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$$

①$z<0,F_2(z)=0.$

②$0\le z<1,F_2(z)=P\{X>Y,X\le z\}+P(\phi)$

$$=\iint_{\substack{x>y\\x\le z}} f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}3\,dy=3\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3\right)=\frac{3}{2}z^2-z^3$$

③$1\le z<2$，

$$F_2(z)=P\{X>Y\}+P\{X\le Y,X\le z-1\}$$
$$=\frac{1}{2}+\iint_{\substack{x\le y\\x\le z-1}} f(x,y)dxdy=\frac{1}{2}+\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}3\,dy$$
$$=\frac{1}{2}+3\left[\frac{2}{3}(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}(z-1)^2\right]$$
$$=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$$

④$z\ge 2$，$F_2(z)=1$。

故 Z 的分布函数为$F_2(z)=\begin{cases}0,z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3,0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2,1\le z<2\\ 1,z\ge 2\end{cases}$。

（23）（本题满分 11 分）

设总体的概率密度为$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$其中$\theta\in(0,+\infty)$为未知参数，$X_1,X_2,X_3$为来自总体$X$的简单随机样本，令$T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

（Ⅰ）求T的概率密度;

（Ⅱ）确定a，使得aT为θ的无偏估计.

解析：（1）因$T=\max(X_1,X_2,X_3)$，则T的分布函数为

$$F_T(t)=P\{T\le t\}=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}$$

$$=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}.$$

$$=P\{X_1\le t\}\cdot P\{X_2\le t\}\cdot P\{X_3\le t\}$$

$$=F_{X_1}(t)\cdot F_{X_2}(t)\cdot F_{X_3}(t)$$

$$=F_X^3(t)$$

因 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0,x<0\\ \dfrac{1}{\theta^3}x^3,0\le x<\theta\\ 1,x\ge\theta\end{cases}$

$\therefore T$ 的分布函数 $F_T(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \left(\dfrac{1}{\theta^3}t^3\right)^3, & 0\le t<\theta\\ 1, & t\ge\theta\end{cases}=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{\theta^9}t^9, & 0\le t<\theta\\ 1, & t\ge\theta\end{cases}$

$\therefore T$ 的概率密度 $F_t(t)=\begin{cases}\dfrac{9}{\theta^q}t^8,0<t<\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

（2）要使 aT 为 θ 的无偏估计，则 $E(at)=\theta$, 即 $aE(T)=\theta$

可得：$a=\dfrac{\theta}{E(T)}$.

又 $E(T)=\int_{-\infty}^{+\infty}tF_T(t)dt=\int_0^\theta\dfrac{q}{\theta q}t^8\cdot tdt=\dfrac{9}{10}\theta$.

$\therefore a=\dfrac{\theta}{\frac{9}{10}\theta}=\dfrac{10}{9}$.