2016 考研数学（一）真题(完整版)

来源：文都教育

一、选择题：18 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）若反常积分 $\int_0^{-\infty}\frac{1}{x^a(1+x)b}\mathrm{d}x$ 收敛，则（　　）

（A）　$\alpha<1$ 且 $b>1$.

（B）　$\alpha>1$ 且 $b>1$.

（C）　$\alpha<1$ 且 $a+b>1$.

（D）　$\alpha>1$ 且 $a+b>1$.

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), x<1,\\ \ln x, x\geq 1.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是（　　）

（A）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x-1), x\geq 1.\end{cases}$

（B）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x-1)-1, x\geq 1.\end{cases}$

（C）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x+1)+1, x\geq 1.\end{cases}$

（D）　$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1,\\ x(\ln x-1)+1, x\geq 1.\end{cases}$

（3）若 $y-(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y-(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y-qx$ 的两个解，则 $q(x)=$（　　）

（A）　$3x(1-x^2)$

（B）　$-3x(1+x^2)$

（C）　$\frac{x}{1+x^2}$

（D）　$-\frac{x}{1+x^2}$

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, \quad \leq 0,\\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则（　　）

（A） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

（B） $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

（C） $f(x)$ 是 $x=0$ 处连续但不可导

（D） $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是

（A） A^2 与 B^2 相似

（B） A^{-1} 与 B^{-1} 相似

（C） $A+A^2$ 与 $B+B^2$ 相似

（D） $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为（　　）

（A）单叶双曲面　　（B）双叶双曲面

（C）椭球面　　（D）柱面

（7）设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$, 记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$，则（　　）

（A） p 随着 μ 的增加而增加

（B） p 随着 σ 的增加而增加

（C） p 随着 μ 的增加而减少

（D） p 随着 σ 的增加而减少

（8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果，A_1,A_2,A_3,且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果，A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为

（A）-3　　（B）3　　（C）-5　　（5）5

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题指定位置上.

（(9） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$_____.

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rolA=$____.

(11)设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}t\big|_{(0,1)}=$___.

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f''(0)=1$，则 a=______.

（13）行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$______.

（14）设 $x_1,x_2,\ldots x_n$ 为来自总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\bar{x}$=9.5，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\left|x\le r\le 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right.\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

（Ⅰ）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

（Ⅱ）若 $y(0)=1,\ y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1,L_t$ 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_L \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

（18）（本题满分 10 分）

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平机围成，Σ 和 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（19）（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1, 0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2\ldots)$ 证明：

（Ⅰ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

（20）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 2 & a & 1\\ -1 & 1 & a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & a\\ -a-1 & a\end{pmatrix}$。

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求此方程.

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 A^{99}

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1,X\le Y,\\ 0,X>Y.\end{cases}$

（Ⅰ）写出 (X,Y) 的概率密度；

（Ⅱ）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（Ⅲ）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

（23）（本题满分 11 分）

设总体的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\ 0,其他\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

（Ⅰ）求 T 的概率密度；

（Ⅱ）确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.