2016 考研数学（二）真题及答案解析

来源：文都教育

一、选择：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）设 $a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1),\ a_2 = \sqrt{x}\,\mathrm{ln}(1+\sqrt[3]{x}),\ a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x \to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是

（A） a_1, a_2, a_3.　　（B） a_2, a_3, a_1.

（C） a_2, a_1, a_3.　　（D） a_3, a_2, a_1.

解析：选择 B

当 $x \to 0^+$ 时 $\alpha_1 = x\cos\sqrt{x} - 1 \sim x\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x^2$

$\alpha_2 = \sqrt{x}\cdot\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right) \sim x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{6}}$

$\alpha_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x$

∴从低到高的顺序为 $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1$　选择 B

（2）已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), x<1, \\ \ln x, x\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

（A） $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, x<1, \\ x(\ln x - 1), x\geqslant 1. \end{cases}$　　（B） $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, x<1, \\ x(\ln x + 1) - 1, x\geqslant 1. \end{cases}$

（C） $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, x<1, \\ x(\ln x + 1) + 1, x\geq 1. \end{cases}$　　（D） $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, x<1, \\ x(\ln x - 1) + 1, x\geqslant 1. \end{cases}$

解析：由原函数的定义知，$f(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$

$x<1, f(x) = \int 2(x-1)\mathrm{d}x = (x-1)^2 + C_1.$

$x>1, f(x) = \int \ln x\mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C_2.$

又原函数必可导，则 $f(x)$ 一定连续.

$\therefore F(x)$ 在 $x=1$ 连续

$\therefore C_1 = C_2 - 1$

$\therefore F(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + c, x<1 \\ x(\ln x - 1) + c + 1, x\geq 1 \end{cases}$，$c \in R$.当 $c=0$ 时，选 D.

（3）反常积分①$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$,②$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为

（A）①收敛，②收敛. （B）①收敛，②发散.

（C）①收敛，②收敛. （D）①发散，②发散.

解析：① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\frac{1}{x}$

$$=-\left[\lim_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}\right]=-(0-1)=1$$ 收敛

② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=-\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_0^{+\infty}$

$$=-\left[\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}-\lim_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}}\right]=+\infty$$ 发散

∴应选 B.

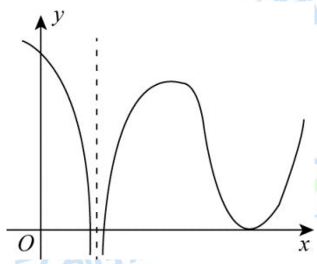
（4）设函数 $f(x)$ 在（-∞，+∞）内连续，其导函数的图形如图所示，则

（A）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，由线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

（B）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，由线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

（C）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，由线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

（D）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，由线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.



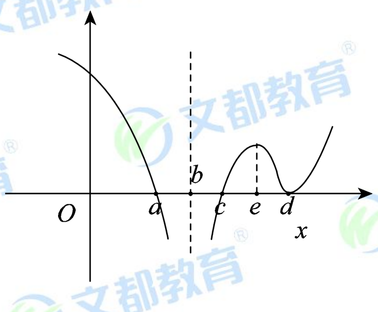
(4)**解析：**导函数图形如图

极值的怀疑点为：a,b,c,d

① $\left.\begin{array}{l}当x<a时, f'(x)>0\\ 当x>a时, f'(x)<0\end{array}\right\}\Rightarrow a$ 为极大值点

② $\left.\begin{array}{l}当x<b时, f'(x)<0\\ 当x>b时, f'(x)<0\end{array}\right\}\Rightarrow a$ 不是极值点

③ $\left.\begin{array}{l}当x<c时, f'(x)<0\\ 当x>c时, f'(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow c$ 为极小值点



④当 $x<d$ 和 $x>d$ 时，$f'(x)>0$ 故 $x=d$ 不是极值点

∴有 2 个极值点 排除 C，D.

又 $\left.\begin{array}{l}当x<b时, f'(x)\downarrow \quad \therefore f''(x)<0\\ 当b<x<e时, f'(x)\uparrow \quad \therefore f''(x)>0\end{array}\right\}\Rightarrow x=b$ 为拐点.

$$\left.\begin{array}{l}\text{当} b<x<e \text{时}, f'(x)\uparrow \quad \therefore f''(x)>0 \\ \text{当} e<x<d \text{时}, f'(x)\downarrow \quad \therefore f''(x)<0\end{array}\right\} \Rightarrow x=e \text{ 为拐点.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{当} e<x<d \text{时}, f'(x)\downarrow \quad \therefore f''(x)<0 \\ \text{当} x>d \text{时}, f'(x)\uparrow \quad \therefore f''(x)>0\end{array}\right\} \Rightarrow x=d \text{ 为拐点.}$$

∴有 3 个拐点，排除 A

∴应选 B.

（5）设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i''(x_0)<0(\mathrm{i}=1,2)$，若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个邻域内，有

（A） $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$　　（B） $f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

（C） $f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$　　（D） $f_2(x)\le g(x)\le f_1(x)$

解析：

因 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在 (x_0,y_0) 有公切线，

则 $f_1(x_0)=f_2(x_0), f_1'(x_0)=f_2'(x_0)$.

又 $y=f_1(x)$ 与 $y=f_2(x)$ 在（ x_0,y_0 ）处的曲率关系为 $k_1>k_2$.

因 $k_1=\dfrac{|f_1''(x_0)|}{[1+f_1'^{2}(x_0)]^{\frac{3}{2}}}$， $k_2=\dfrac{|f_2''(x_0)|}{[1+f_1'^{2}(x_0)]^{\frac{3}{2}}}$

又 $f_1''(x_0)<0, f_2''(x_0)<0$, 则 $f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0$.

从而在 x_0 的某个领域内 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 均为凸函数，故 $f_1(x)\leqslant g(x)$， $f_2(x)\le g(x)$, 排除（C）,(D).

令 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$, 则 $F(x_0)=0, F'(x_0)=0, F''(x_0)<0.$

由极值的第二充分条件得 $x=x_0$ 为极大值点.

则 $F(x)\le F(x_0)=0$. 即： $f_1(x)\le f_2(x)$.

综合上述，应选（A）.

（6）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$，则

（A） $f_x' - f_y' = 0.$　　（B） $f_x' + f_y' = 0.$

（C） $f_x' - f_y' = f.$　　（D） $f_x' + f_y' = f.$

解析： $f(x,y) = \dfrac{e^x}{x-y}$

$$f_x' = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2} \qquad f_y' = \frac{0 + e^x}{(x-y)^2} = \frac{e^x}{(x-y)^2}$$

$$\therefore f_x' + f_y' = \frac{e^x(x-y) - e^x + e^x}{(x-y)^2} = \frac{e^x}{x-y} = f$$

应选（D）.

（7）设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是

（A） $\boldsymbol{A}^T$ 与 $\boldsymbol{B}^T$ 相似.

（B） $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

（C） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似.

（D） $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

解析： $\because$ A 与 B 相似

$\therefore$ 存在可逆矩阵 P，使得 $B = P^{-1}AP$

故 $B^T = P^T A^T (P^{-1})^T = \left[(P^T)^{-1}\right]^{-1} A^T \left[(P^T)^{-1}\right]$ $\therefore$ A^T 与 B^T 相似（A）正确

又 $B^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$，故 B^{-1} 与 A^{-1} 相似，（B）正确

$B + B^{-1} = P^{-1}(A + A^{-1})P$，故 $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似，（D）正确，

所以应选（C）.

（8）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1，2，则

（A） $a > 1.$　　（B） $a < -2.$

（C） $-2 < a < 1$　　（D） $a = 1$ 与 $a = -2$

解析： 二次型矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & -1\\ -1 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda-a & -1\\ -1 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda-a+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-a+1\end{vmatrix}=(\lambda-a-2)(\lambda-a+1)^2=0$$

$\therefore$ A 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\ \lambda_2=\lambda_3=a-1$

$\because$ 二次型的正、负惯性指数分别为 1，2，则 $\begin{cases}a+2>0\\ a-1<0\end{cases}$

所以 $-2<a<1$，所以选（C）

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为______________.

解析: $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^3}{x(1+x^2)}+\dfrac{\arctan(1+x^2)}{x}]=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{x^3}{1+x^2}-x+\arctan(1+x^2)]=\dfrac{\pi}{2}$，

所以斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$______________.

解析： $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{1}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{\mathrm{n}}{n}\right)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}\sin\dfrac{n}{n}\right)$

$=\int_o^1 x\sin x\mathrm{d}n=\sin1-\cos1$

（11）以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为____________.

解析： $x^2-\left(x^2-e^x\right)$ 为对应齐次方程的解，即 e^x 是 $y'-y=0$ 的解;

设非齐次方程为 $y'-y=f(x)$，将 $y=x^2$ 代入得 $f(x)=2x-x^2$，

所求方程为 $y'-y=2x-x^2$.

（12）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则当 $n\ge 2$ 时，$f^{(n)}(0)=$____________.

解析： $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$

$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$

$f''(x)=2+2f'(x)$，$f'''(x)=2f''(x)$，

$f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)(n\ge 2)$，

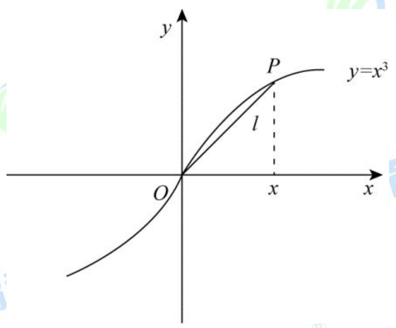
$f(0)=1, f'(0)=2+2=4, f''(0)=10$

$f^{(n)}(0)=2^{n-1}\cdot 10=5\cdot 2^{n-1}$

（13）已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l.若点 P 的横坐标时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点（1，1）时，l 对时间的变化率是____________.

解析： 设 P 的坐标为 (x,x^3)，则由题意

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v_0$



$L=\sqrt{(x^3)^2+x^2}=\sqrt{x^6+x^2}$

则 L 对 t 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{6x^5+2x}{2\sqrt{x^6+x^2}}\cdot v_0$$

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{x=1}=\frac{8}{2\sqrt{2}}-v_0=2\sqrt{2}v_0$$

（14）设矩阵 $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价，则 $a=$____________.

解析： $\because A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价

$\therefore r(A)=r(B)$

$$\because B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore r(B)=2$

$\therefore |A|=0$, 即 $\begin{vmatrix}a&-1&-1\\-1&a&-1\\-1&-1&a\end{vmatrix}=0$，得 $a=2$ 或 $a=-1$

当 $a=-1$ 时，$A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$，此时 $r(A)=1$ 不合题意

$\therefore a=2$

解答题：15～23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

解析： $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|\mathrm{d}t(x>0)$

当 $0<x<1$ 时

$$f_1x_1=\int_0^x|t^2-x^2|\,\mathrm{d}t=\int_0^x(x^2-t^2)\mathrm{d}t+\int_x^1(t^2-x^2)\mathrm{d}t$$

$$=x^3-\frac{1}{3}x^3+\int_x^1t^2\mathrm{d}t-x^2(1-x)$$

$$=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$

故 $f'|x|=4x^2-2x$

当 $x\geqslant1$ 时

$$f(x)=\int_0^1(x^2-t^2)\mathrm{d}t=x^2-\frac{1}{3}$$

故 $f'(x)=2x$

$$\therefore f'(x)=\begin{cases}4x^2-2x & 0<x<1\\2x & x\geqslant1\end{cases}$$

当 0<x<1 时，令 $f'(x)=4x^2-2x=0$ 得 $x=\frac{1}{2}$

$f''(x)=8x-2, f''(\frac{1}{2})=2>0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 为最小值点，最小值为 $f(\frac{1}{2})=\frac{4}{3}\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$

当 $x \geqslant 1$ 时，令 $f'(x)=2x=0$ 得 $x=0$(舍)

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

解析：（1）方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ ①两边对 x、y 分别求偏导得

$$2xz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+2=0 \quad ②$$

$$2yz+(x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}+2=0 \quad ③$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 得 $\begin{cases} xz+1=0 \\ yz+1=0 \end{cases}$ 解得 $z=0$（舍）或 $y=x$

$\therefore$ 当 $x\neq 0$ 时 $\begin{cases} z=-\frac{1}{x} \\ y=x \end{cases}$ 代入原式 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 得

$$2x^2\times(-\frac{1}{x})+\ln(-\frac{1}{x})+2(2x+1)=0$$

解得 $x=-1, y=-1, z=1$

当 $x=0$ 时 无解

（2）②式两边对 x, y 分别求偏导得

$$2z+2x\frac{\partial z}{\partial x}+2x\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(-\frac{1}{z^2})(\frac{\partial z}{\partial x})^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \quad ④$$

$$2x\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{1}{z^2}\bullet\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0 \quad ⑤$$

③式两边对 y 求偏导得

$$2z+2y\frac{\partial z}{\partial y}+2y\frac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad ⑥$$

将 $x=-1, y=-1, z=1$ 代入⑤⑥得 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3}, B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2}{3}$

$$AC-B^2=\frac{4}{9}>0, A<0$$

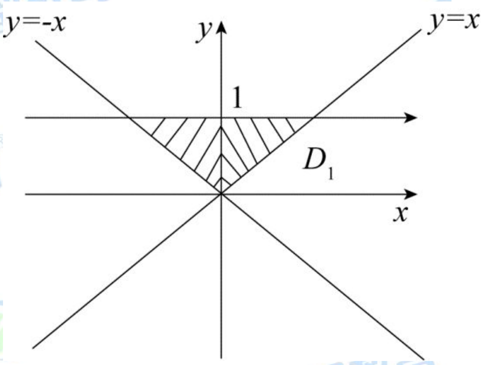
$\therefore x=-1, y=-1$为极大值点，极大值为$z=1$

（18）（本题满分 10 分）

设D是由直线$y=1, y=x, y=-x$围成的有界区域，计算二重积分$\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$

解析：①积分区域如图：

②D 关于 y 轴对称而$\frac{xy}{x^2+y^2}$与$\frac{y^2}{x^2+y^2}$关于 x 为偶函数.



$$\therefore \iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint\limits_{D1} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \frac{r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2} r\,\mathrm{d}r$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\,\mathrm{d}r$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{1}{2}r^2\Bigg|_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 d\theta-\frac{\pi}{4}$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta-1)\,\mathrm{d}\theta-\frac{\pi}{4}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\csc^2\theta d\theta-\frac{\pi}{2}$$

$$=\cot\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}.$$

（19）（本题满分 10 分）

已知 $y_1(x)=e^x$ ， $y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程$(2x-1)\ y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的解， 若

$u(-1)=e,u(0)=-1,$求$u(x)$，并写出该微分方程的通解.

解析：$y_2^{'}(x)=(u'+u)e^x, y_2''(x)=(u''+2u'+u)ex,$代入方程得

$(2x-1)u''+(2x-3)u'=0,$

令$p=u',p'=u'',$则$(2x-1)p'+(2x-3)p=0$，

解得$p=c(2x-1)e^{-x}$，即$\dfrac{du}{dx}=c(2x-1)e^{-x}$，

解得$u(x)=-c(2x+1)e^{-x}+c_1$，

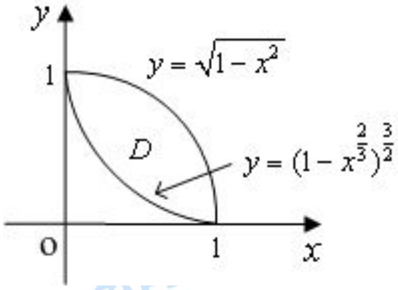
又$u(-1)=e,u(0)=-1,$则$u(x)=-(2x+1)e^{-x}$，

方程的通解为$y(x)=c_1e^x+c_2(2x+1)e^{-x}.$

(20)(本题满分 11 分)

设D是由曲线$y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$与$\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right)$围成的平面区域，求$D$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

解析：D 的图形如下图所示，D 绕x轴旋转一周所得旋转体的体积可看作两个体积之差，即



$$\mathrm{V}=\pi\int_0^1\left(\sqrt{\left(-x^2\right)}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_0^1\left[\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2\mathrm{d}x\ =\pi\int_0^1\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x-\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^3\mathrm{d}x$$

$$=\pi\times\frac{2}{3}-\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^6 t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi-3\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 t\left(1-\sin^2 t\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{3}\pi-3\pi\times\left(\mathrm{I}_7-\mathrm{I}_9\right)=\frac{2}{3}\pi-3\pi\times\frac{16}{9\times 7\times 5}$$

$$=\frac{18\pi}{35}$$

表面积$\mathrm{A}=\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2$，其中

$$A_1=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y^2(x)}dx=2\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\pi,$$

由 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}(0\le t\le\frac{\pi}{2})$ 得 $y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$，$0\le x\le 1$，

$$A_2=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+y'^2(x)}dx=2\pi\int_0^1\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\times x^{-\frac{1}{3}}dx=-6\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^0\sin^4 t\cos t dt$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t d(\sin t)=6\pi\times\frac{1}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{6\pi}{5}$$

故 $A=2\pi+\frac{6\pi}{5}=\frac{16\pi}{5}$

(21)(本题满分 11 分)

已知 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数 $f(0)=0$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值；

（Ⅱ）证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

解析：(1) 由题设知 $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt+c.\because f(0)=0\therefore c=0\Rightarrow f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt$

则函数平均值为 $\frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx}{\frac{3}{2}\pi-0}=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dx\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dt\int_t^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dx$

$$=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)dt=-\frac{1}{3\pi}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos t dt$$

$$=\frac{-1}{3\pi}\sin t\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{1}{3\pi}$$

（2）$\because f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$

$\therefore$方 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$ 时 $f'(x)<0\Rightarrow$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$ 时 $f(x)$ 单调减少

而 $f(0)=0$ ，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内无零点

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 时，$f'(x)>0$，则当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 时，$f(x)$ 单调增加.

由题意知，显然 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

而 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}\mathrm{d}x \xlongequal[]{x=\frac{3}{2}\pi-t} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u}{\pi+u}\mathrm{d}u$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{\pi+t}\right)\sin t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t>0$

由零点函理知：$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$ 内有唯一的零点。

综上知：$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{2}\pi\right)$ 有唯一零点。

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$, 且方程组 $Ax=\beta$ 无解.

（Ⅰ）求 a 的值;

（Ⅱ）求方程组 $A^{\mathrm{T}}Ax=A^{\mathrm{T}}\beta$ 的通解.

解析： $\because$ $Ax=\beta$ 无解

（1）$\therefore |A|=0$，即 $\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a&0&2a\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&a\\a&2a\end{vmatrix}=a^2-2a=a(a-2)=0$

$\therefore a=0$或$a=2$

当 $a=0$ 时，

$$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\1&1&1&0\\1&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&1&1&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&0&-2\end{array}\right)$$

$\because r(A)\neq r(A,\beta)$　　$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$Ax=\beta$ 无解

当 $a=2$ 时，$(A,\beta)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&0\\1&0&2&1\\3&1&3&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&0\\0&-1&3&1\\0&-2&6&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-1&0\\0&-1&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$\because r(A)=r(A,\beta)=2<3$　　$\therefore a\neq 2$　　$\therefore a=0$

（2）当 $a=0$ 时 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$A^T\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\therefore\left(A^TA\ \vdots\ A^T\beta\right)=\left(\begin{array}{ccc:c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&-1\\3&2&2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&1&-1\\0&-1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$\therefore A^TAX=A^T\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$（其中 k 为任意常数）

(23)(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解析：

(1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda^2+3\lambda+2\right)=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

∴ A 的特征值为 $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=-2$

当 $\lambda_1=0$ 时解 $(0E-A)x=0$ 即 $Ax=0$

由 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{3}{2}&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_1=0$ 的无关特征向量 $d_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=-1$ 时 解 $(-E-A)x=0$

由 $-E-A=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-2&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&2\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_2=-1$ 的无关特征向量 $d_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_3=-2$ 时 解 $(-2E-A)x=0$

由 $(-2E-A)=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-2&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-2&1&-1\\0&0&1\\0&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

得 A 对应于 $\lambda_3=-2$ 的无关特征向量 $d_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

令 $P=\left(d_1,d_2,d_3\right)$，则 $P^{-1}AP=\Lambda$

$$\therefore A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}^{-1}$$

其 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$\therefore A^{99}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-2^{99}\\0&-1&-2^{100}\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（2）$\because B^2 = BA \qquad \therefore B^{100} = BA^{99}$

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} \beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2 \\ \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2 \\ \beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2 \end{cases}$$

$$\therefore A^{99} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2^{99} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2^{99} \\ 0 & -1 & -2^{100} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（2）$\because B^2 = BA \qquad \therefore B^{100} = BA^{99}$

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} \beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2 \\ \beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2 \\ \beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2 \end{cases}$$