2006年GCT考试全国统考

清华水木艾迪推荐考前必做模拟试题（二）

数学基础能力测试题

（25题，每题4分，共100分，考试时间45分钟）

1．购买商品A、B、C，第一次各买2件，共11.4元；第二次购买A商品4件，B商品3件，C商品2件，共14.8元；第三次购买A商品5件，B商品4件，C商品2件，共17.5元，则一件A商品的价格是（）

A．0.70　　B．0.75　　C．0.80　　D．0.85

2．一根铁丝，先截下它的$\frac{1}{3}$，又截下它的$\frac{1}{4}$，结果两根相差0.5m，这根铁丝的长度是（　）m

A．$\frac{6}{7}$　　B．2　　C．6　　D．1.5

3．关于x的方程$k^2x^2+2(k-1)x+1=0$有实数根，则下列说法正确的是（ ）

A．当$k=\frac{1}{2}$时方程的两根互为相反数

B．当$k=0$时方程的根是$x=-1$

C．当$k=\pm1$时方程的两根互为倒数

D．当$k\le\frac{1}{4}$时方程有实数根

4．如果关于x的的不等式$(m-1)x<\sqrt{4x-x^2}$的解集为$\{x\,|\,0<x<2\}$，那么实数m的值是

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．2　　D．0

5．若甲以10发中8，乙以10发中6，丙以10发中7的命中率打靶，3人各射击一次，则3人中只有1人命中的概率是（ ）

A．$\frac{21}{250}$　　B．$\frac{47}{250}$　　C．$\frac{42}{750}$　　D．$\frac{3}{20}$

6. 复平面上一等腰直角三角形的3个顶点按逆时针方向依次为O, Z_1和Z_2，$\angle Z_1OZ_2=\frac{\pi}{2}$，若对$Z_1=1+\sqrt{3}i$，则$Z_2$对应的复数$Z_2=$（）

A．$-1-\sqrt{3}i$　　B．$1-\sqrt{3}i$　　C．$\sqrt{3}+i$　　D．$-\sqrt{3}-i$

7．已知等比数列$\{a_n\}$的公比$q>1(n\in N)$，第17项的平方等于第24项，则使$a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$成立的$n$的取值范围是（　）

A．n>9　　B．n<9　　C．n>19　　D．n>16

8．在ΔABC中，若$c-a$等于 AC 边上的高 h，则$\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}$等于（ ）

A．-1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．1

9．将边长为a的正方形 ABCD 沿对角线 AC 折起，使得 BD=a，则三棱锥 D-ABC 的体积为（　）

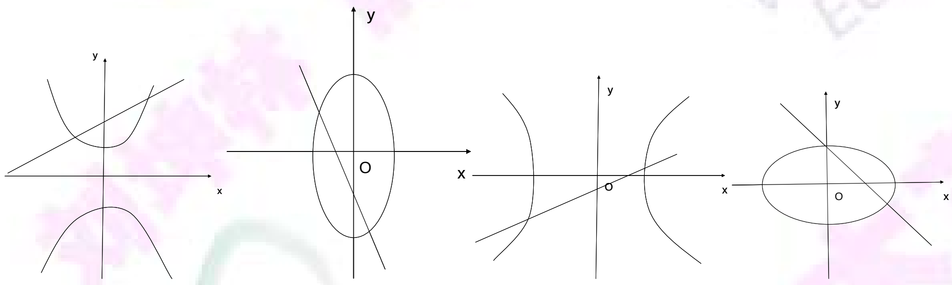
A．$\frac{a^3}{6}$　　B．$\frac{a^3}{12}$　　C．$\frac{\sqrt{3}a^3}{12}$　　D．$\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$

10．过抛物线$y^2=4x$的焦点 F 作一直线交抛物线于 P、Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别为m和n，则（　）

A．$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<1$　　B．$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$

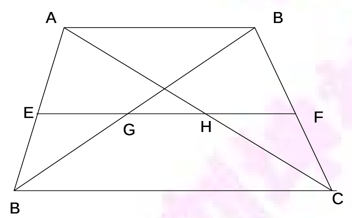
C．$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>1$　　D．$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$与 1 的大小不定

11．如图所示，若$ab\neq b$，则$ax-y+b=0$和$bx^2+ay^2+b=ab$所表示的曲线只可能是（　）



A　　B　　C　　D

12．如图所示，梯形 ABCD 中，AD∥BC,中位线 EF 分别与 BD、AC 交于点 G、H，若 AD=6，BC=10，则 GH=（ ）



A．*2*　　B．3

C．4　　D．5

13．设$f(x)$是奇函数，$F(x)=\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)$，其中$a$为不等于 1 的正数，则$F(x)$是（ ）

A．偶函数　　B．奇函数　　C．非奇非偶函数　　D．奇偶性与a有关

14．直线$y=kx+1(k\in R)$与椭圆（或圆）$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{m}=1$恒有公共点，则实数$m$的取值范围是（ ）

A．$m\geq 1$　　B．$1\,m\leq 1$　　C．$m\geq 4$　　D．$m\leq 2$

15．函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$，则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的（　）

A．第二类间断点　　B．第一类非可去间断点
C．第一类可去间断点 D．连续点

16．函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 在 $(0,\infty)$ 上的最大值是（ ）

A．1　　B．2　　C．$1+e^{-1}$　　D．$1+e^{-2}$

17．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-\ln(2+x)}{x}$ 等于（）

A．3/2　　B．2　　C．0　　D．∞

18．设 $f''(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，且 $f(0)=1, f(2)=3, f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)dx=$（）

A．3　　B．2　　C．7　　D．6

19．设 $=f''(x_0)=0, f'''(x_0)>0$，则（）

A．$f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　B．$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

C．$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　D．$(x_0, f(x_0))$ 是曲线的拐点

20．若行列式 $\begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ 8 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=4$，则 $a=$（　）

A．-2　　B．4　　C．2　　D．1

21．设有任意两个 m 维向量组 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 使

$(\lambda_1+r_1)a_1+(\lambda_2+r_2)a_2+\cdots+(\lambda_m+r_m)a_m+(\lambda_1-r_1)\beta_1+(\lambda_2+r_2)\beta_2+\cdots+(\lambda_m+r_m)\beta_m=0$ 则（　　）

A．$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性相关

B．$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都线性无关

C．$a_1+\beta_1,a_2+\beta_2,\cdots,a_m+\beta_m,a_1-\beta_1,a_2-\beta_2,\cdots,a_m-\beta$ 线性无关

D．$a_1+\beta_1,a_2+\beta_2,\cdots,a_m+\beta_m,a_1-\beta_1,a_2-\beta_2,\cdots,a_m-\beta$ 线性相关

22．已知矩阵 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$, P 为三阶非零矩阵，且满足 $PQ=0$，则 $r(P)=()$

A． $t=6$时， P 的秩必为 1　　B． $t=6$时， P 的秩必为 2

C． $t\neq6$时， P 的秩必为 1　　D． $t\neq6$时， P 的秩必为 2

23．已知其次线性方程组 $Az=0, A$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，则方程组 $Az=0$ 没有非零解的充分条件是（ ）

A． A 的行向量线性无关　　B． A 的行向量线性相关

C． A 的列向量线性无关　　D． A 的列向量线性相关

24．n 阶方阵 A 与对角矩阵相似的充分必要条件是（ ）

A． A 有 n 个不全相同的特征值　　B． A^T 有 n 个不全相同的特征向量

C． A 有 n 个不全相同的特征向量　　D． A 有 n 个线性无关的特征向量

25．若 $\lambda=2$ 是可逆矩阵 A 的一个特征值，则 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一个特征值是（ ）

A． $\frac{4}{3}$　　B． $\frac{3}{4}$　　C． $\frac{1}{12}$　　D． $\frac{1}{4}$

参考答案与试题解析

1． 答案 A

解析：由题意知，第二次比第一次多买 2 件 A 商品，1 件 BS 商品；第三次比第二次多买 1 件 A 商品，2 件 B 商品，其差价刚好为 A 商品的单价，即（14.8－11.4）－（17.5－14.8）＝3.4－2.7＝0.70。

2． 答案 C

解析：由于截下的两根铁丝的长度的差是铁丝原来的长度的 $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$，故铁丝的原长为 $0.5\times12=6$。

3． 答案 D

解析：因 $\Delta=(2k-1)^2-4k^2=-4k+1\geq0$，故 $k\leq\frac{1}{4}$。

4． 答案 C

解析：用图像法画出 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 的图像，使不等式的解集为 $(0,2)$，在直线 $y=(m-1)x$ 过点 $(2,2)$，故由此得 $m-1=1, m=2$

5． 答案 B

解析：记“甲命中”为事件 A ,“乙命中”为事件 B，“丙”命中为事件 C，则“3 人中只有 1 人命中”为事件 $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$ 。因 $A\overline{B}\overline{C}$ ， $\overline{A}B\overline{C}$ ， $\overline{A}\overline{B}C$ 互斥， $A,\overline{A},B,\overline{B},C,\overline{C}$ 且均相互独立，故所求概率为

$$p=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)$$

又 $P(A)=\frac{4}{5},P(\overline{A})=\frac{1}{5},P(B)=\frac{3}{5},P(\overline{B})=\frac{2}{5},P(C)=\frac{7}{10},P(\overline{C})=P(\overline{C})=\frac{3}{10}$

故 $p=\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{7}{10}$

6． 答案 D

解析：OZ_1 绕 O 旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度得 OZ_2，故 $Z_2=Z_1e^{i\frac{\pi}{2}}=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}=2e^{i\frac{7\pi}{6}}=-\sqrt{3}-i$。

7． 答案 C

解析：由已知 $a_{17}^2=a_{24}$，得 $\left(a_1q^{16}\right)^2=a_1q^{23}$，因 $q>1,a_1\neq 0$，得 $a_1\neq a^{-9}$ 又

$a_1+a_2+\cdots+a_n>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$，故 $\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}>\frac{\frac{1}{a_1}\left(1-\left(\frac{1}{q^n}\right)\right)}{1-\frac{1}{q}}$ 即 $a_1>\frac{1}{a_1a^{n-1}}$，将

$a_1\neq a^{-9}$ 代入得 $q^{-18}>q^{1-q},n>19$ 且 $n\in N$。

8． 答案 D

解析：由已知，$c-a=h$ 又因 $c=\frac{h}{\sin A},a=\frac{h}{\sin C}=h$，故得 $\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\sin C}=h$ 即

$\frac{1}{\sin A}-\frac{1}{\sin C}=1$，于是，$\sin C-\sin A=\sin A\sin C$，从而

$2\cos\frac{C+A}{2}\sin\frac{C-A}{2}=-\frac{1}{2}\left[\cos(C+A)-\cos(C-A)\right]$

$=-\frac{1}{2}\left[2\cos^2\frac{C+A}{2}-1-1-2\sin^2\frac{C-A}{2}\right]$，移项整理得 $\left(\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}\right)^2=1$，因

$c-a=h>0$，故 $C>A,\sin\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C+A}{2}=1$。

9． 答案 D

解析：由 $OD=OB=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

$S_{\Delta BOD}=\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a^2}{4},V_{D-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta BOD}\cdot AC=\frac{1}{3}\times\frac{a^2}{4}\times\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

10．答案 B

解析：设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $\lambda=\frac{PF}{FQ}=\frac{m}{n}1=\frac{x+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{m-\frac{p}{2}+\frac{m}{n}\left(n-\frac{p}{2}\right)}{1+\frac{m}{n}}$ 得

$m+n=mn,\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=1$

11．答案 C

解析：方程 $bx^2+ay^2+b=ab$ 可变为 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$，若表示椭圆，则排除 B、D；若表示双曲线，

且 $a>0,b<0$，则 C 可满足，若 $a<0,b>0$，则排除 A。故 C 为正确答案。

12．答案 A

解析：EF 是梯形的中位线，则 EG 是 ΔADB 的中位线，GF 是 ΔDBC 的中位线，HF 是 ΔDAC 的中位线，根据中位线的性质，

$$\mathrm{EG}=\frac{1}{2}\mathrm{AD},\mathrm{GF}=\frac{1}{2}\mathrm{BC},\mathrm{FH}=\frac{1}{2}\mathrm{AD}$$

$$\mathrm{GH}=\mathrm{GF}-\mathrm{FH}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}-\frac{1}{2}\mathrm{AD}=\frac{1}{2}(\mathrm{BC}-\mathrm{AD})=\frac{1}{2}(10-6)=2$$

13．答案 A

解析：$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{a^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\frac{2a^x-a^x-1}{2(a^x+1)}$

$$=-f(x)\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{a^x+1}\right)=f(x)\left(\frac{1}{a^x+1}-\frac{1}{2}\right)=F(x)$$

14．答案 A

解析：由 $\begin{cases}y=kx+1\\mx^2+5y^2=5m\end{cases}$ 消去 y 得 $(m+5k^2)+10k+5-5m=0$，由

$\Delta=(10k)^2-4(m+5k^2)(5-5m)\geq 0$ 得 $5k^2+m-1\geq 0$ 故 $m\geq 1-5k^2,k\in R$ 恒成立，由此得 $m\geq 1$。

15．答案 A

解析：$f(x)$ 在 $x=1$ 无定义，故 D 项不正确，又因

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1^{+-}}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)^{\frac{1}{x-1}}=\infty$$

故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点。选 A.。

16．答案 D

解析：$f'(x)=(2-x^2)e^{-x^2}\cdot 2x$ 令 $f'(x)=0$ 得 $x=\sqrt{2}$，当 $x\in(0,\sqrt{2})$ 时，$f'(x)>0,x\in(\sqrt{2},+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，故 $f(\sqrt{2})$ 是极大值。

$$f\left(\sqrt{2}\right)=\int_0^2(2-t)e^{-t}dt=\left[-2e^{-1}+\left(te^{-1}+e^{-1}\right)\right]\Big|_0^2=1+e^{-2}$$

17．答案 D

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1-\ln(2+x)}{x}=\infty$,故选 D。

18．答案 B

解析：$\int_0^1 xf''(2x)dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1 xf''(2x)d(2x)=\dfrac{1}{2}\int_0^1 xdf'(2x)=\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{4}\int_0^1 2f'(2x)d(2x)$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}f(2x)\Big|_0^1=2$$

19．答案 C

解析：由 $f'''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$ 知，在 x_0 附近，当 $x<x_0$ 时 $f''(x)<0$，

当 $x>x_0$ 时 $f''(x)>0$，故 $x=x_0$ 为 $y=f(x)$ 的拐点。

20．答案 A

解析：由代数余子式的定义，

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}a & -2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=-(6a+8)=4$，于是 $a=-2$。

21．答案 D

解析：由

$$(\lambda_1+r_1)a_1+(\lambda_2+r_2)a_2+\cdots+(\lambda_m+r_m)a_m+(\lambda_1-r_1)\beta_1+(\lambda_2+r_2)\beta_2+\cdots+(\lambda_m+r_m)\beta_m=0$$

$$\lambda_1(a_1+\beta_1)a_1+\lambda_2(a_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_m(a_m+\beta_m)+r_1(a_1-\beta_1)$$
$$+r_2(a_2+\beta_2)\beta_2+\cdots+r_m(a_m+\beta_m)=0$$

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $r_1,r_2,\cdots,r_m$ 不全为零，故向量组

$a_1+\beta_1,a_2+\beta_2,\cdots,a_m+\beta_m,a_1-\beta_1,a_2-\beta_2,\cdots,a_m-\beta$ 线性相关

22．答案 D

解析：因 P,Q 均为三阶方阵，又 $PQ=0$, 故 $r(P)+r(Q)\le 3$，当 $t=6$ 时，$r(Q)=1$, 于是 $r(P)\le 2$。

当 $t\ne 6$ 时，$r(Q)=2$, 于是 $r(P)\le 1$，又 $r(P)\ge 1$（P 为三阶非零方阵），故 $r(P)=2$。

23．答案 C

解析：线性方程组 $Az=0$ 仅有零解的充要条件是 $r(A)=n$，A 的列向量线性无关

24．答案 D

解析：D 为正确答案。A、B、C 均不正确。

25．答案 B

解析：由 $Az = 2z$，得 $A^{-1}z = \frac{1}{2}z$，进而

$$\left(A^{-1}\right)^2 z = \frac{1}{4}z，又\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1} = 3\left(A^{-1}\right)^2，故\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1} = 3\left(A^{-1}\right)^2 = \frac{3}{4}z。$$